Högstadiets Matematiktävling 2025/26
Kvalificeringstävling 5-11 november 2025
Lösningsförslag och bedömningsmall

Varje uppgift ger 0–3 poäng. **Endast svar utan motivering ger 0 poäng såvida inte annat anges i rättningsanvisningarna**. Helt korrekt lösning ger 3 poäng. Endast hela poängtal ges.

Notera att endast ekvationer eller uträkningar aldrig ger full poäng (om inte annat anges). Variabler måste definieras och det måste vara tydligt var ekvationer eller uträkningar kommer ifrån. Det måste även finnas ett logiskt flöde i lösningen.

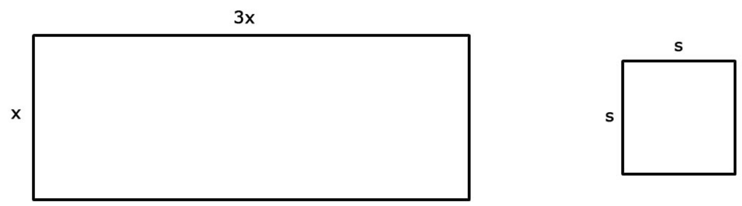
Uppgifterna kan ofta lösas på många olika sätt och det är troligt att eleverna hittar andra lösningsmetoder än de nedan föreslagna. Bedömningsmallen visar de delpoäng som ges för olika steg i de föreslagna lösningarna, och dessa poängtal ska adderas. Om eleven har åstadkommit en annan lösning eller dellösning tjänar bedömningsmallen som utgångspunkt för bedömningen.

Tack för er medverkan!

#1.

Lösningsförslag: Vi ska bestämma kvadratens area. För att kunna beräkna denna behöver vi veta längden av kvadratens sida, vilket vi kan bestämma eftersom vi vet hur kvadratens omkrets förhåller sig till den längre sidan i rektangeln.

Att sidorna i rektangeln förhåller sig som 3:1 betyder att om den korta sidan är x dm så är den längre sidan $3x$ dm (se figur). Låt oss också beteckna sidorna i kvadraten med s.



Figur 1: Problem 1

Rektangelns omkrets är 480 cm, vilket gör att vi kan ställa upp

$$480 = 3x + x + 3x + x = 8x$$

dvs

$$x = \frac{480}{8} = 60\ cm$$

Detta betyder att rektangelns längsta sida är

$$3x = 3 \cdot 60 = 180\ cm$$

Enligt uppgiften är kvadratens omkrets lika lång som rektangelns längsta sida. Detta betyder att

$$180 = s + s + s + s = 4s$$

vilket ger kvadratens sida som

$$s = \frac{180}{4} = 45\ cm$$

Slutligen kan vi nu beräkna kvadratens area till

$$s^2 = 45^2 = 2025\ cm^2$$

Svar: Kvadratens area är 2025 cm^2.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Bestämmer rektangelns sidolängder	+1p
Bestämmer kvadratens sida	+1p
Bestämmer kvadratens area	+1p

#2.

Lösningsförslag 1: Låt oss sätta

$$n = 4^{3^{2^1}}$$

Det betyder att vi skall räkna ut sista siffran i talet

$$5^n$$

där n är ett heltal.

Talet är en produkt av väldigt många femmor, och därför delbart med 5. Tal som är delbara med 5 har alltid 5 eller 0 som sista siffra.

Men om talet skulle sluta på 0 så är det ett jämnt tal och det måste därför innehålla en jämn faktor. Vårt tal är en produkt av enbart udda faktorer (enbart 5:or), och därmed måste hela talet vara udda.

Därmed måste slutsiffran i vårt tal vara 5.

Svar: Talet slutar på siffran 5.

Lösningsförslag 2: Låt oss beräkna

$$n = 5^{4^{3^{2^1}}} = 5^{4^{3^2}} = 5^{4^9} = 5^{262144}$$

Det betyder att vi skall räkna ut sista siffran i talet

$$5^{262144}$$

Talet är en produkt av 262144 stycken femmor, och därför delbart med 5. Tal som är delbara med 5 har alltid 5 eller 0 som sista siffra.

Men om talet skulle sluta på 0 så är det ett jämnt tal och det måste därför innehålla en jämn faktor. Vårt tal är en produkt av enbart udda faktorer (262144 stycken 5:or, inga andra faktorer), och därmed måste hela talet vara udda.

Därmed måste slutsiffran i vårt tal vara 5.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Inser att talet är en produkt av enbart 5:or	+1p
Inser att tal delbara med 5 endast kan sluta på 0 och 5	+1p
Tydlig motivering och korrekt slutsats	+1p

#3.

Lösningsförslag: Denna uppgift kräver ingen motivering. Nedan följer dock ett resonemang som leder fram till rätt svar.

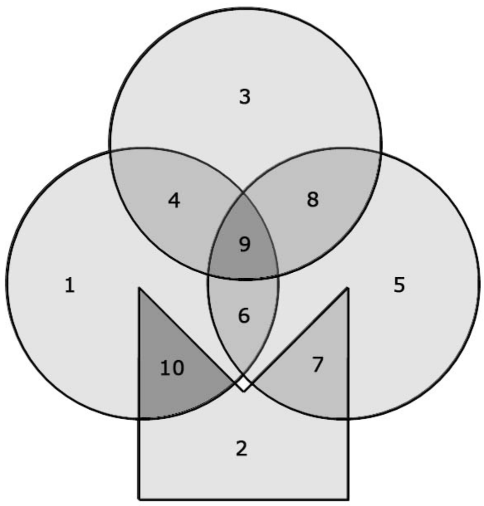
Låt a, b, c, d, e vara mängden regn de fem dagarna: a, b, c är cirklarna från vänster till höger i figuren, d är M-biten, och e är tårtbiten. Vi delar nu upp de tio områdessummorna i två grupper:

- Grupp 1: $a, b, c, a+b, b+c, c+a, a+b+c$, där $a+b+c$ uppenbart är störst.
- Grupp 2: $d, d+c, d+a+e$, där d uppenbart är minst.

Eftersom $a+b+c$ (området där de tre cirklarna överlappar varandra) är den största av de 7 summorna i grupp 1, måste $a+b+c \geq 7$. Lås oss undersöka:

- **Fall 1:** $a+b+c=7$.
  Då måste de andra summorna i Grupp 1 vara exakt 1 - 6, vilket betyder att summorna i Grupp 2 måste vara 8, 9, 10. Detta ger $d=8$. Eftersom a och e måste vara olika är $a+e \geq 3$, dvs $d+a+e \geq 11$, vilket då är omöjligt.
- **Fall 2:** $a+b+c=8$.
  Detta ger två underfall: Först att $a, b, c = 1, 3, 4$ i någon ordning. Men i så fall förekommer summan $1+3=4$ igen i grupp 1, vilket inte är tillåtet.
  Alltså återstår det andra underfallet: $a, b, c = 1, 2, 5$ i någon ordning. Det ger att grupp 1 består av summorna $1, 2, 3, 5, 6, 7, 8$, och grupp 2 består av summorna $4, 9, 10$. Detta ger att $d=4$ och den enda möjligheten för $d+c$ är att $c=5$ och $d+c=9$. Detta ger i sin tur att $d+a+e=10 \Rightarrow a+e=6$. Men detta ger fallen $a=1, e=5$ eller $a=2, e=4$, som båda motsäger att det föll olika mängd regn i alla områden. Alltså är även detta fall omöjligt.
- **Fall 3:** $a+b+c=9$.
  Detta ger några möjligheter:
  - $a, b, c = 1, 2, 6$ i någon ordning. Då består grupp 1 av $1, 2, 3, 6, 7, 8, 9$, medan grupp 2 består av $4, 5, 10$, dvs $d=4$, $c=1$, och $a+e=6$. Men då måste $a=2$ och $e=4$, vilket blir samma värde som d, alltså omöjligt.
  - $a, b, c = 1, 3, 5$ i någon ordning. Då består grupp 1 av $1, 3, 4, 5, 6, 8, 9$, medan grupp 2 består av $2, 7, 10$. Detta ger $d=2$, $c=5$, och $a+e=8$. Detta går inte om $a=3$, för då blir $e=5=c$. Däremot går det om $a=1$, vilket ger $e=7$.
  - $a, b, c = 2, 3, 4$ i någon ordning. Då består grupp 1 av $2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$, medan grupp 2 består av $1, 8, 10$. Då är $d=1$ och det finns ingen möjlighet för c som skulle uppfylla $a+c=8$ eller $a+c=10$.

  Vi har nu hittat den enda möjligheten som minimerar mittfältet mellan alla cirklarna, nämligen $a=1, b=3, c=5, d=2, e=7$ och följande områdessummor:



Figur 2: Problem 3

Som kuriosa kan vi tillföra att det finns en giltig lösning för $a+b+c=10$, nämligen den som ges av $a=1, b=6, c=3, d=2, e=5$.

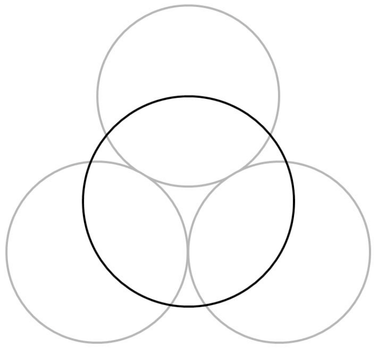
Poäng:
Endast svar krävs.

Alla tio värden korrekt placerade i figuren 3p

Om den icke-optimala lösningen där $a + b + c = 10$ hittas istället för den korrekta lösningen ges 1p.

#4.

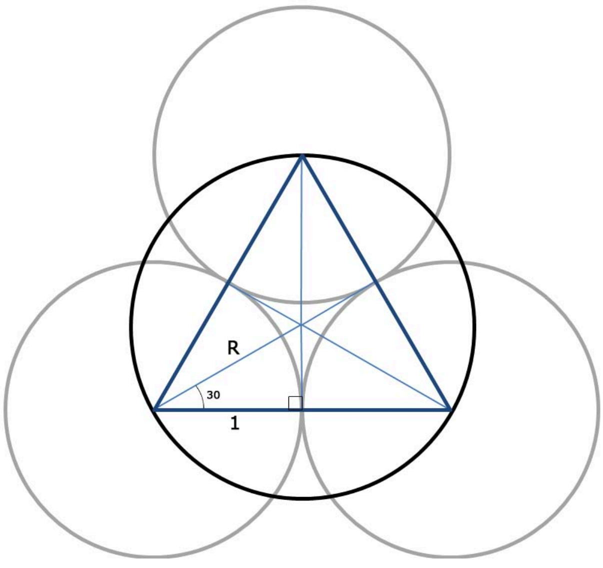
Lösningsförslag: Vi börjar med att rita en bild av cirklarna, enligt figur 3.



Figur 3: Problem 4

Nu noterar vi först att de tre enhetscirklarnas mittpunkter bildar en liksidig triangel. Triangelns sida utgörs av radierna i två angränsande cirklar. Eftersom cirklarnas radie är 1 är triangelns sida därmed 2.

Cirkeln C är den omskrivna cirkeln för denna liksidiga triangel. Eftersom vi söker den cirkelns area behöver vi veta dess radie. Låt oss kalla cirkel Cs radie för R.



Figur 4: Problem 4

Nu drar vi de tre höjderna i den liksidiga triangeln (se figur 4). Eftersom triangeln är liksidig skär höjderna varandra i den omskrivna cirkelns (Cs) mittpunkt. Detta resulterar i sex små trianglar som alla är likformiga (inuti den stora liksidiga triangeln).

Dessa små likformiga trianglar har en rät vinkel vid den liksidiga triangelns sida och deras sex vinklar runt cirkel Cs mittpunkt utgör ett helt varv, vilket gör att den vinkeln är $360/6 = 60°$. Dessa små trianglar är därmed 30-60-90-trianglar.

De små trianglarnas hypotenusa är R, vilket betyder att den kortare kateten är $R/2$ eftersom de är 30-60-90-trianglar. Den längre kateten är precis hälften av en sida i den stora liksidiga triangeln (eller radien i en av enhetscirklarna), och därmed lika med 1. Pythagoras sats ger oss nu

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2 + 1^2 = R^2$$

dvs

$$1 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{4R^2 - R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$$

vilket ger

$$R^2 = \frac{4}{3}$$

Vi kan nu beräkna cirkeln Cs area

$$A = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Svar: Cirkeln C har arean $\frac{4\pi}{3}$.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Inser att de tre cirklarnas mittpunkter utgör en liksidig triangel med sidan 2 och
fastställer positionen för Cs mittpunkt +1p
Bestämmer ett samband (till exempel en ekvation) för cirkel Cs radie +1p
Bestämmer Cs area +1p

#5.

Lösningsförslag: Antalet bollar du drar i den första omgången spelar ingen roll. Oavsett strategi kommer du efter den första omgången ha en boll av någon färg F, och det finns lika många bollar av varje sort, så vilken färg det blir spelar ingen roll.

I den andra omgången drar man två bollar, oavsett strategi. Eftersom det endast finns kvar en av färg F är man säker på att åtminstone en av de två dragna bollarna är av en annan färg. Efter två omgångar har man därför säkert två bollar med olika färger. Detta gäller oavsett vilken av de tre strategierna man valt att följa.

Inför den tredje och sista omgången finns det kvar två bollar i påsen med den färg som du inte redan har i din hand, dvs den färg som behövs för att du ska vinna. De övriga två bollarna i påsen är en av varje färg som du redan har i din hand.

Låt oss nu betrakta de tre strategialternativen:

(a) **Dra två bollar.** Drar man två bollar finns det $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ möjliga utfall (första bollen kan väljas på 4 sätt, den andra på 3 sätt, men sedan spelar ordningen mellan de två ingen roll). Av dessa 6 sätt är det enda utfall du inte vill ha det som ger precis de två färger du redan har i din hand, medan de övriga 5 sätten kommer ge åtminstone en boll av den saknade färgen så att du kan välja den och därmed vinna. Chansen att du lyckas är alltså $\frac{5}{6}$ ($\approx 84\%$).

(b) **Dra tre bollar.** Detta betyder att det ligger kvar en enda boll i påsen. Därmed måste minst en av de bollarna du dragit vara av den saknade färgen (eftersom det fanns två stycken sådana bollar), vilket ger dig 100% chans att vinna med denna strategi.

(c) **Dra en boll.** Om vi drar en boll är chansen att den enda bollen har rätt färg 50% eftersom det finns två gynnsamma utfall av fyra möjliga: $\frac{2}{4} = 50\%$.

Svar: Alternativ (b) är bäst (man vinner alltid), och alternativ (c) är sämst.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Inser att de tre strategierna ger samma resultat efter två omgångar	+1p
Motiverar vilken strategi som är bäst, och att det inte finns två som är lika bra	+1p
Motiverar vilken strategi som är sämst, och att det inte finns två som är lika dåliga	+1p

Alternativ bedömning

Inser att de tre strategierna ger samma resultat efter två omgångar	+1p
Motiverar vilken strategi som borde vara bäst och vilken borde vara sämst	+1p
Motiverar att det inte finns två strategier som är lika dåliga respektive bra	+1p

#6.

Lösningsförslag: Eftersom vi i slutänden vill veta vilken veckodag Lotta äter sitt sista chokladmynt är antalet chokladmynt hon har inte viktigt, bara vilken rest antalet ger vid division med 7 (eftersom en vecka har 7 dagar).

Låt oss därför titta på vad som händer vid krona respektive klave om Lotta innan slantsinglingen hade X chokladmynt, och $X = 7n + r$. r är alltså resten när antalet chokladmynt delas med 7.

Krona: Lotta får 8 mynt till, dvs hon får mynt som räcker en hel vecka, och sedan en dag till

Före X	Efter $X+8$
r	$r+1$
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	0

Att få krona betyder att veckodagen då mynten tar slut förskjuts en dag senare. Hon får totalt 5 krona, dvs veckodagen chokladmynten tar slut förskjuts 5 dagar.

Klave: Lottas antal chokladmynt multipliceras med 8, dvs hon går från X till $8X$, alltså får hon $8X - X = 7X$ chokladmynt till. Dvs hon får mynt som räcker precis ett helt antal veckor.

Före X	Efter $8X$
r	$r+0$
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

Att få klave påverkar alltså inte hennes totala chokladmynts rest vid division med 7, dvs det påverkar inte vilken veckodag mynten tar slut.

Då hon fått fem krona och fem klave betyder detta att antalet chokladmynt hon har i slutet av spelet ändrat resten vid division med 7 fem gånger +1 och fem gånger inte alls. Hennes rest är alltså +5 jämfört med startpositionen som var 0. Om hon äter chokladmynt 1 (rest 1) på en måndag tar de därför slut på dag 5, en fredag.

Svar: Lottas vunna chokladmynt tar slut på en fredag.

Poäng:
Endast svar ger inga poäng. Motiveringar krävs.

Inser att krona adderar 1 till resten vid division med 7	+1p
Inser att klave inte ändrar resten vid division med 7	+1p
Motiverar väl och för ett resonemang som inte förutsätter en viss ordning	+1p